



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



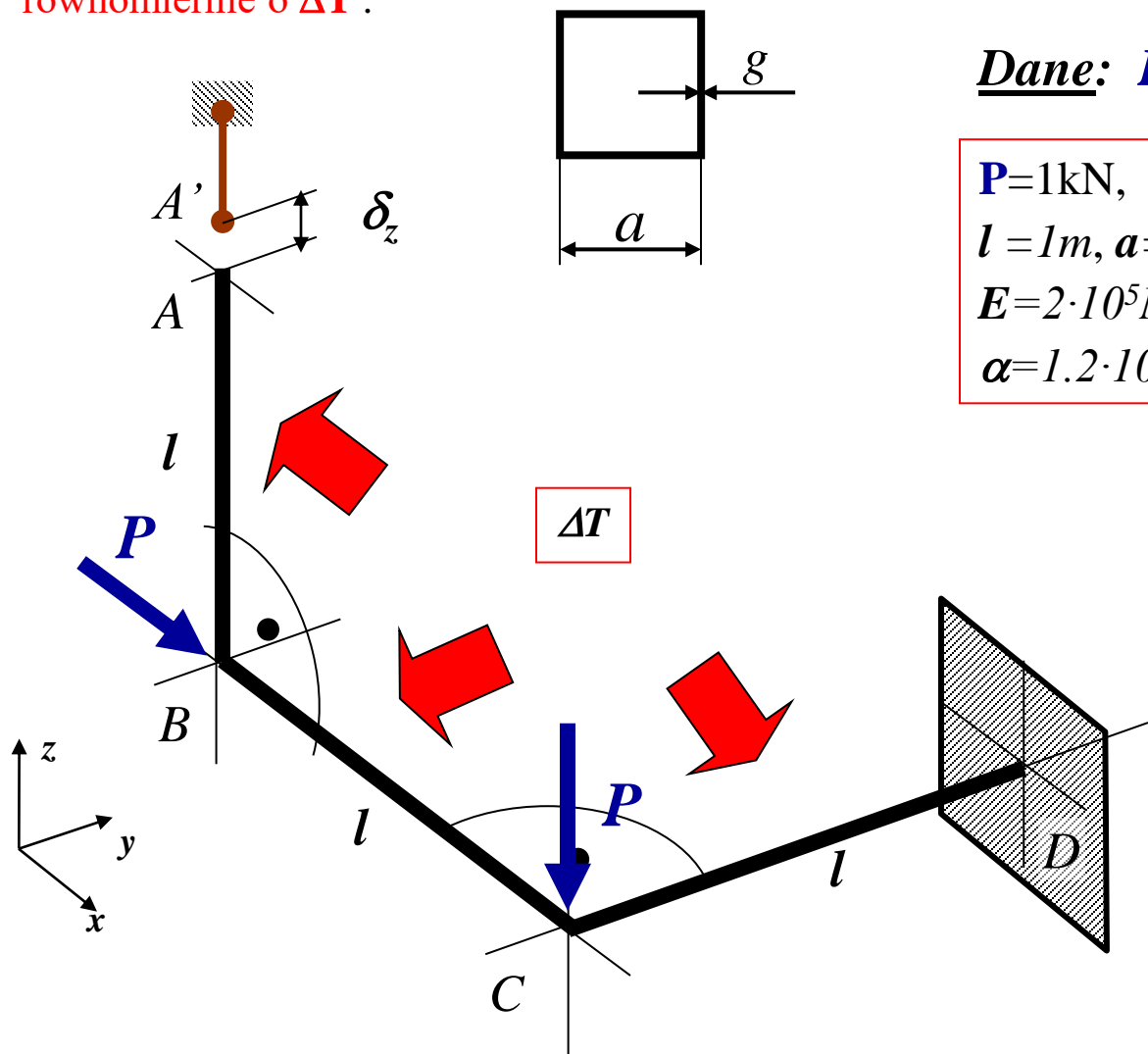
Wykład 10

Konstrukcje prętowe statycznie niewyznaczalne

Obciążenia montażowe i cieplne
(przypadek ogólny)

Obciążenia montażowe i ciepłne

Przykład 1. Rama przestrzenna, zbudowana z prętów o przekroju skrzynkowym, utwierdzona w punkcie D, została podpięta do wieszaka w punkcie A', który jest przesunięty do góry o wartość δ_z względem punktu A. Następnie obciążono ramę układem sił P. Na koniec rama została podgrzana równomiernie o ΔT .



Dane: $P, l, a, g, E, \nu, \alpha, \delta_z, \Delta T$

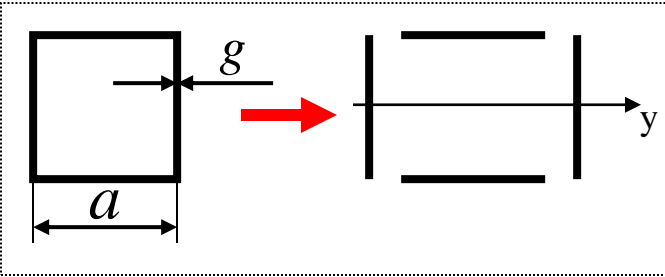
$$P=1\text{kN},$$

$$l=1\text{m}, a=50\text{mm}, g=2\text{mm},$$

$$E=2 \cdot 10^5 \text{MPa}, \nu=0.3,$$

$$\alpha=1.2 \cdot 10^{-5} \text{ } 1/\text{K}, \delta_z=10\text{mm}, \Delta T=100^\circ\text{C}$$

Obciążenia montażowe i ciepłe



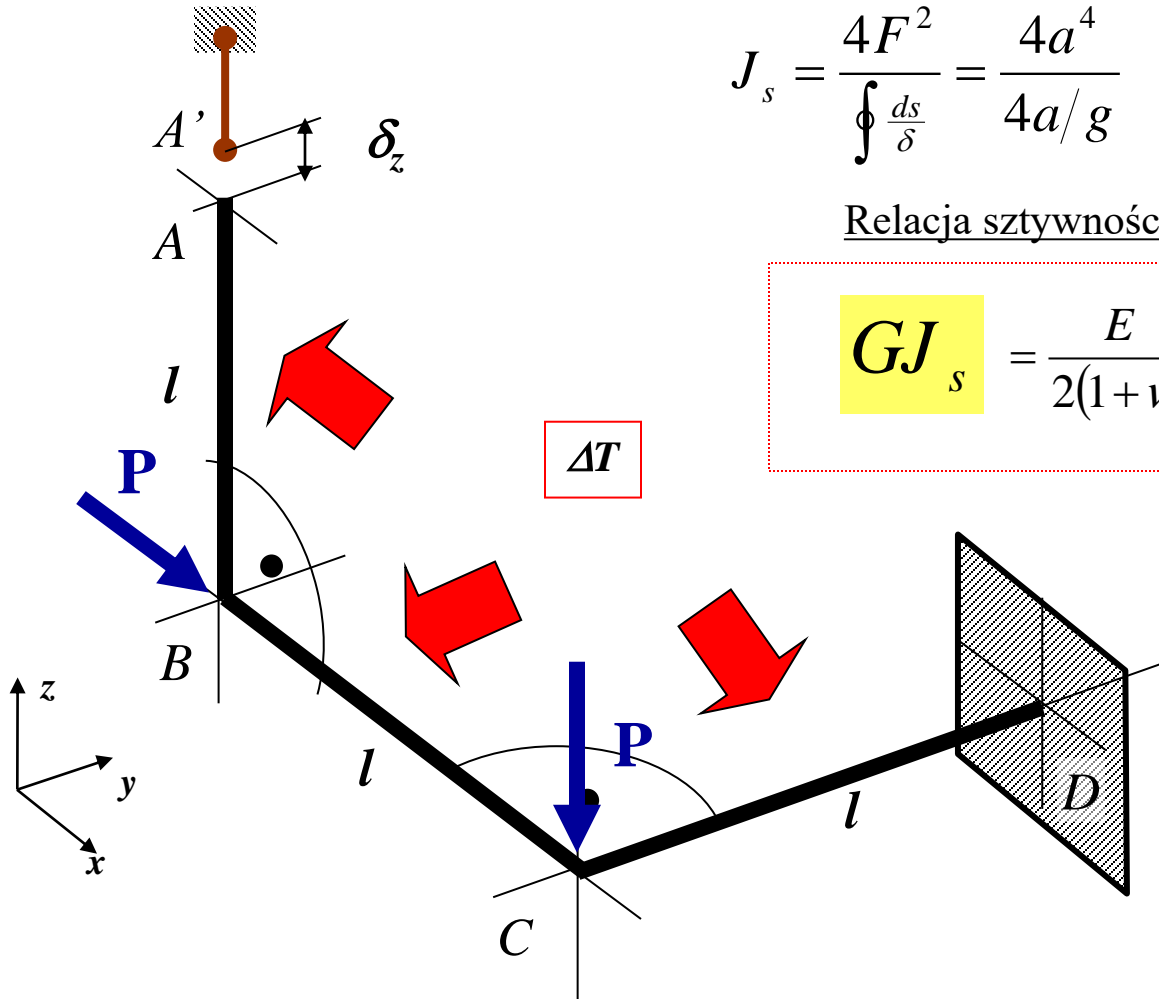
Charakterystyki przekroju:

$$J_y \cong 2 \cdot \left(\frac{1}{12} g a^3 + a g \left(\frac{1}{2} a \right)^2 \right) \rightarrow J_y = \frac{2}{3} g a^3 = 16,7 \text{ cm}^4$$

$$J_s = \frac{4F^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{4a^4}{4a/g} \rightarrow J_s = g a^3$$

Relacja sztywności giętej i skrętnej dla przekroju:

$$GJ_s = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{3}{2} J_y = \frac{3EJ_y}{4(1+\nu)} = \frac{15}{26} EJ_y$$



Obciążenia montażowe i ciepłne

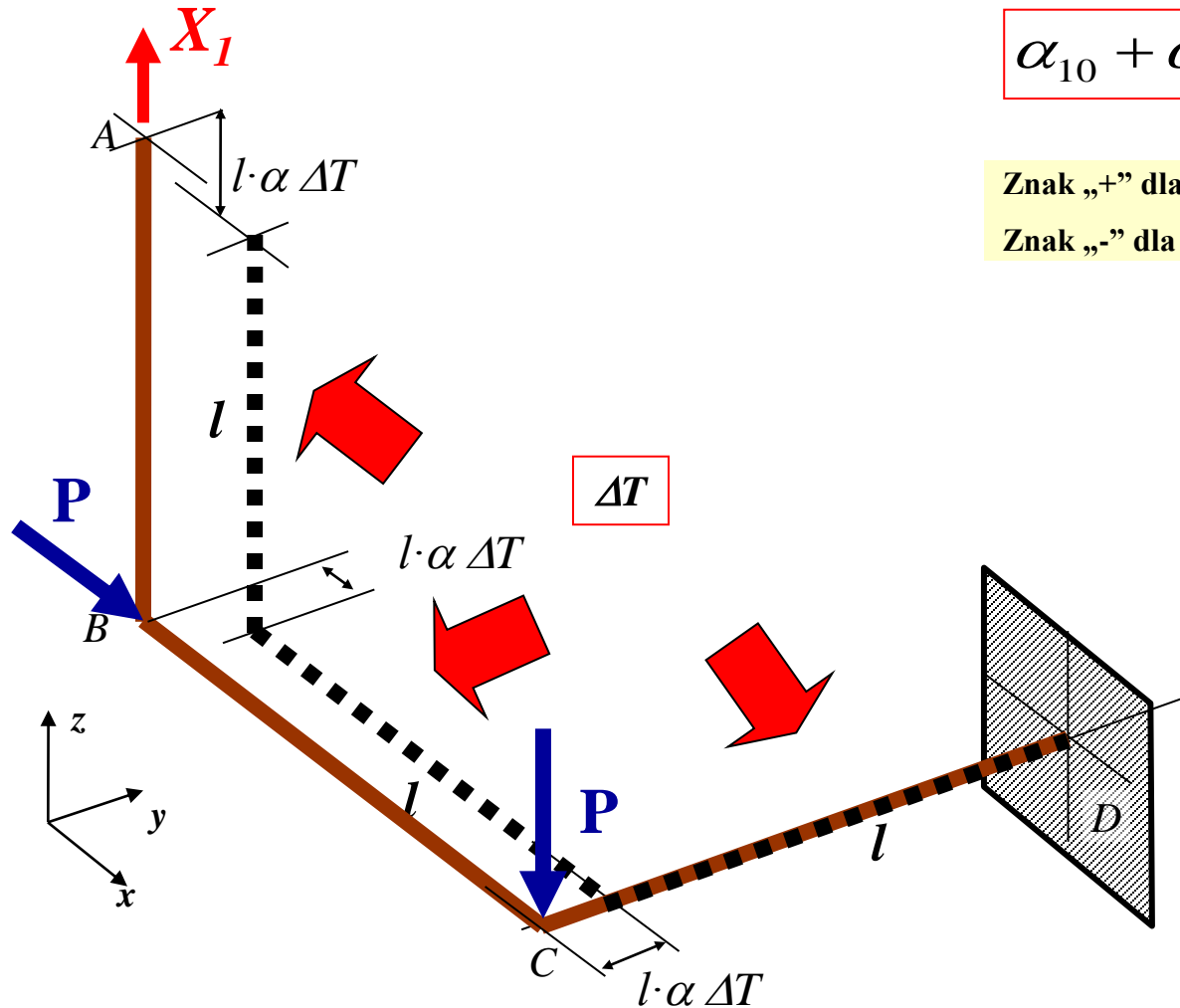
Ustrój zastępczy statycznie wyznaczalny:

Warunki przemieszczeń dla uwolnionego stopnia swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = +\delta_z - l \alpha \Delta T$$

Znak „+” dla montażu bo siła jednostkowa kasuje odchyłkę !

Znak „-” dla termiki bo siła jednostkowa pogłębia odchyłkę !



Kolejne fazy obciążenia:

Sam montaż:

$$\alpha_{11} \cdot X_1 = +\delta_z$$

Montaż + siły:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = +\delta_z$$

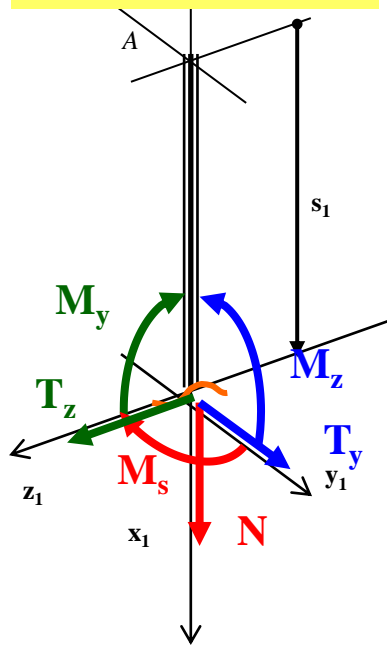
Montaż + siły + temperatura:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = +\delta_z - l \alpha \Delta T$$

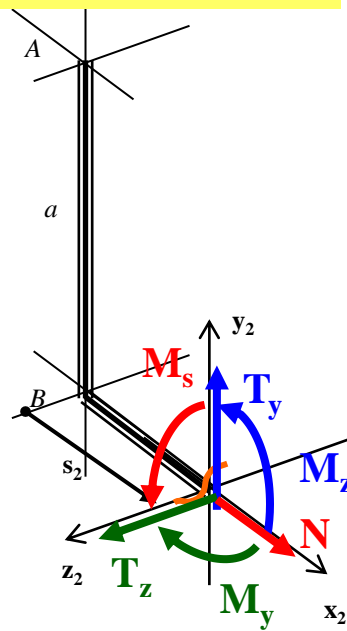
Obciążenia montażowe i ciepłe

Konwencja znaków sił wewnętrznych w przedziałach:

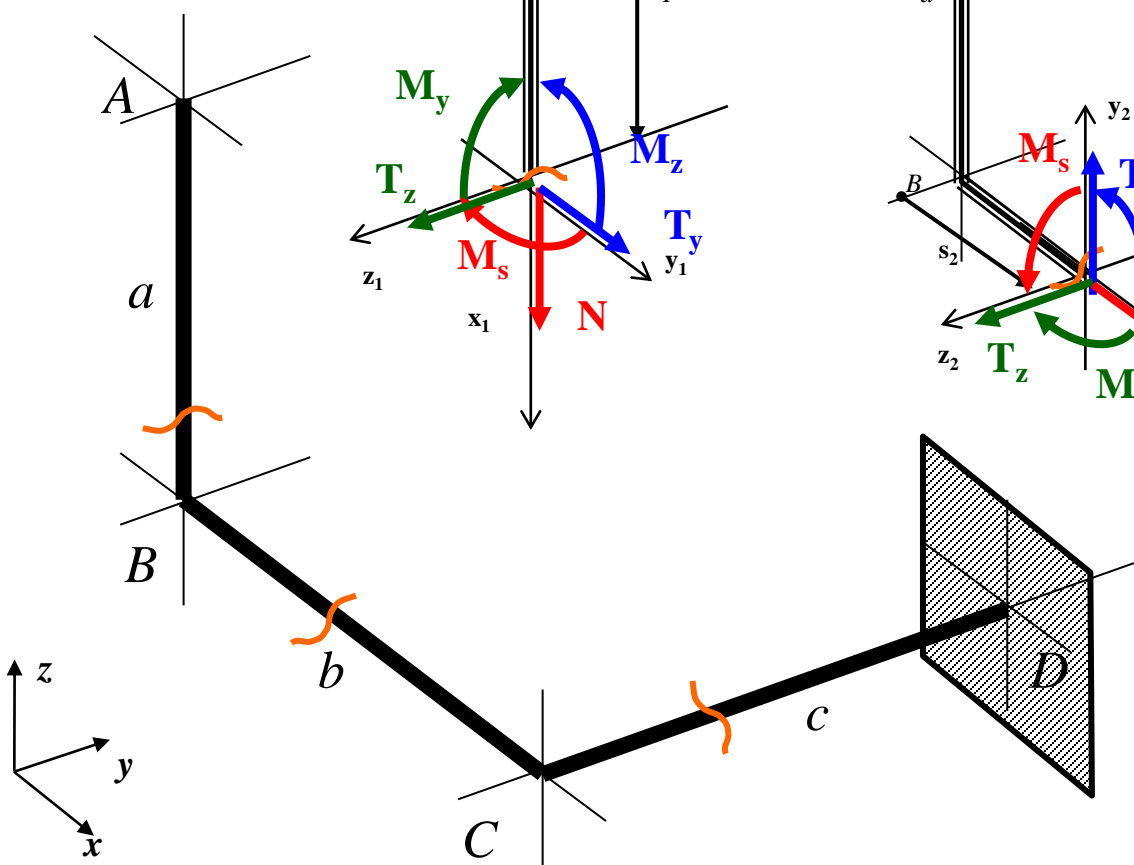
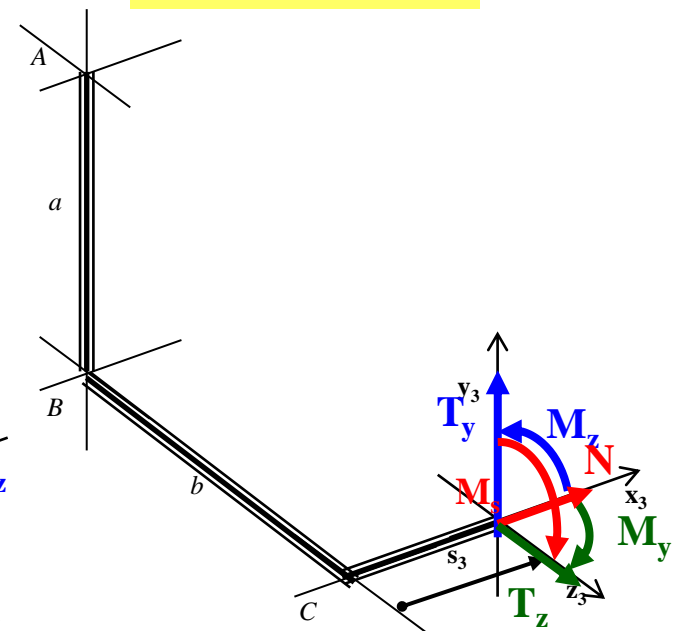
Przedział I (A÷B)



Przedział II (B÷C)

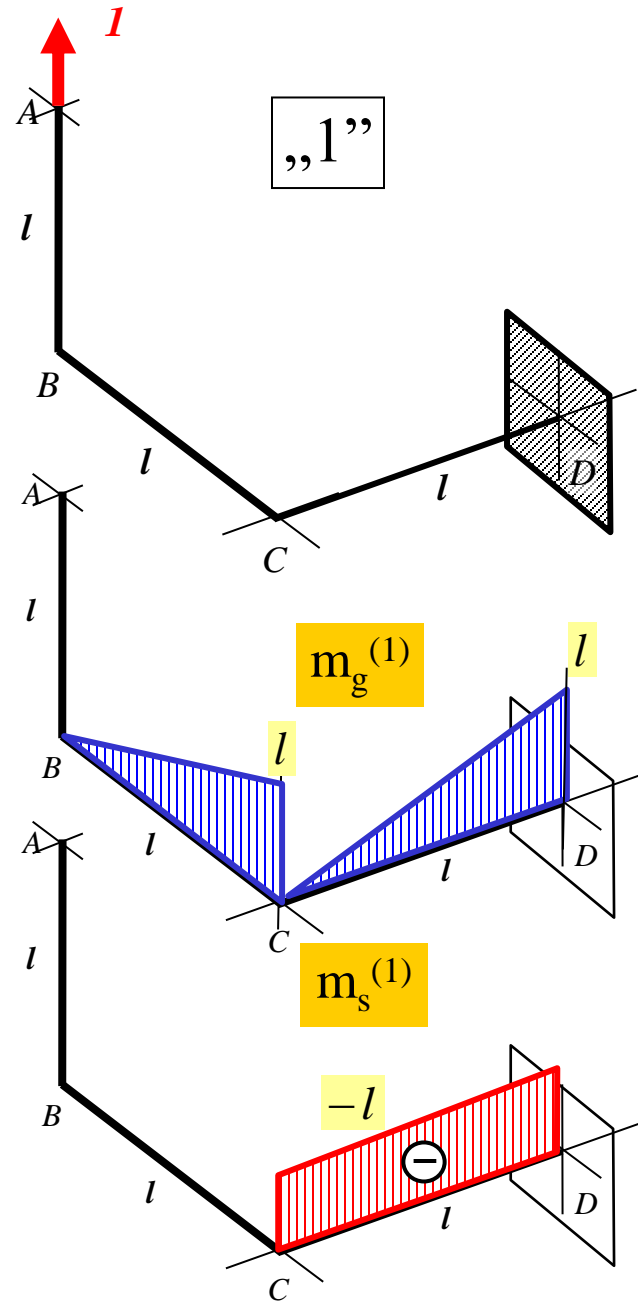
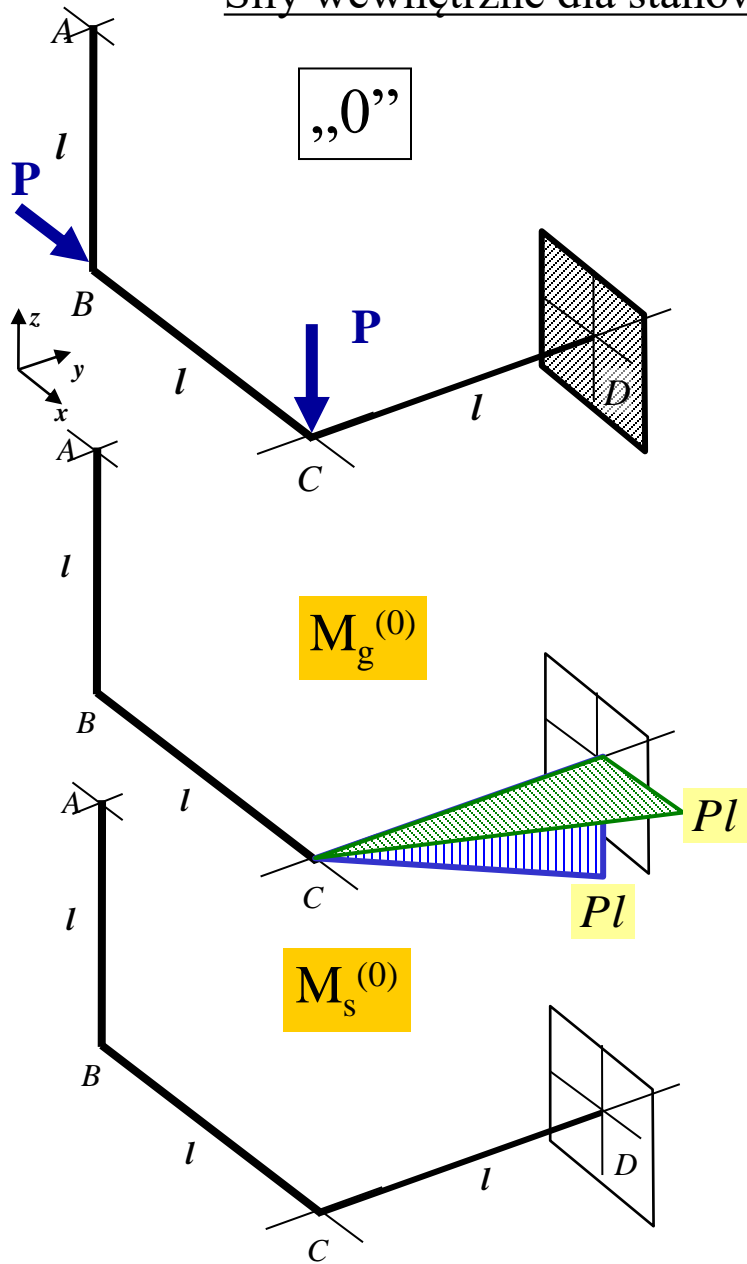


Przedział III (C÷D)



Obciążenia montażowe i ciepłne

Siły wewnętrzne dla stanów „0” i „1”:



Obciążenia montażowe i ciepłne

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l \cdot 2 + \frac{1}{GJ_s} l^3 = \frac{2l^3}{3EJ_y} + \frac{26}{15} \frac{l^3}{EJ_y} = \frac{12}{5} \frac{l^3}{EJ_y}$$

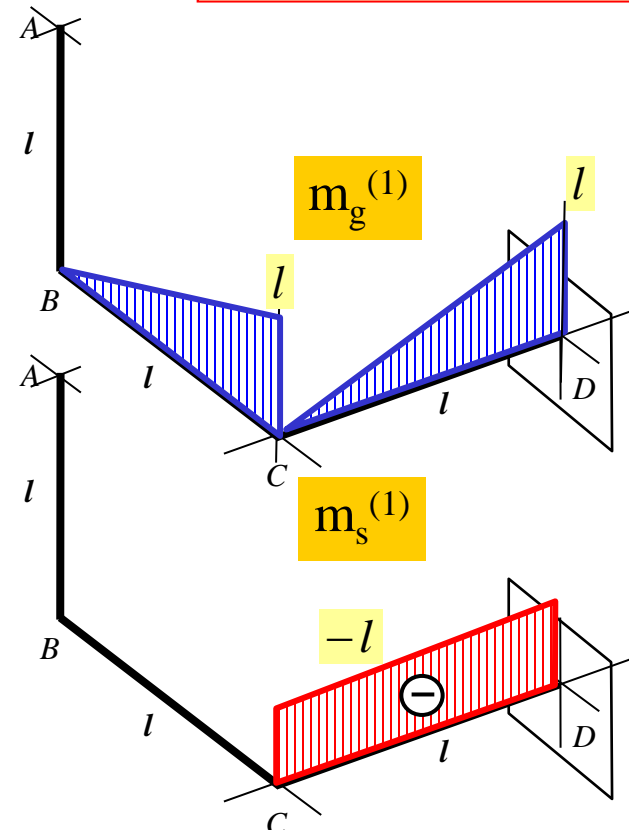
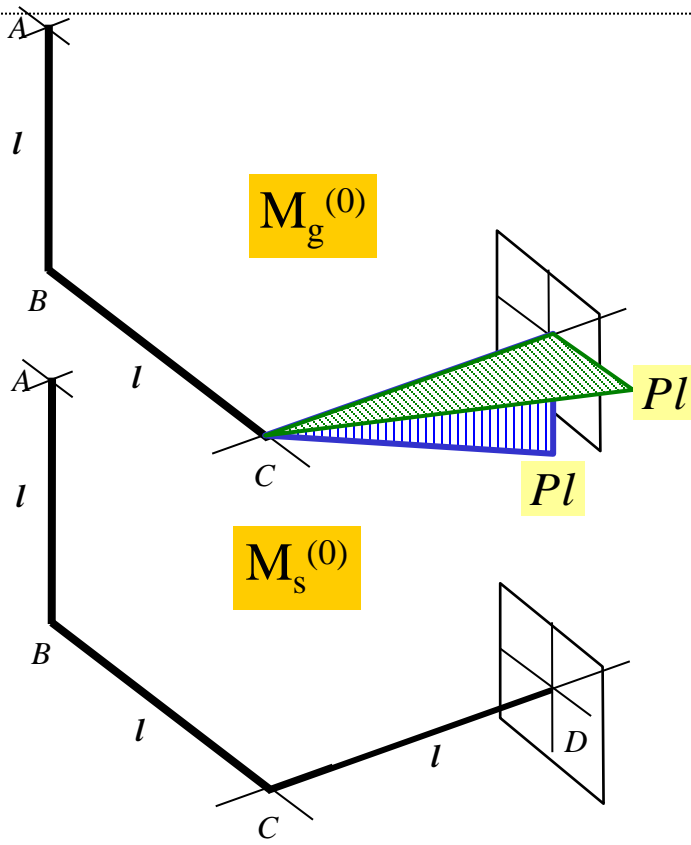
$$\alpha_{10} \cong -\frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} Pl + \frac{1}{GJ_s} \cdot 0 = -\frac{Pl^3}{3EJ_y}$$

Montaż + siły + temperatura:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = +\delta_z - l \alpha \Delta T$$

$$\rightarrow X_1 = \frac{\delta_z - l \alpha \Delta T}{\alpha_{11}} - \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}$$

$$X_1 = \frac{5}{12} \frac{EJ_y (\delta_z - l \alpha \Delta T)}{l^3} + \frac{5}{36} P$$



Obciążenia montażowe i ciepłe

Kolejne fazy obciążenia:

Sam montaż:

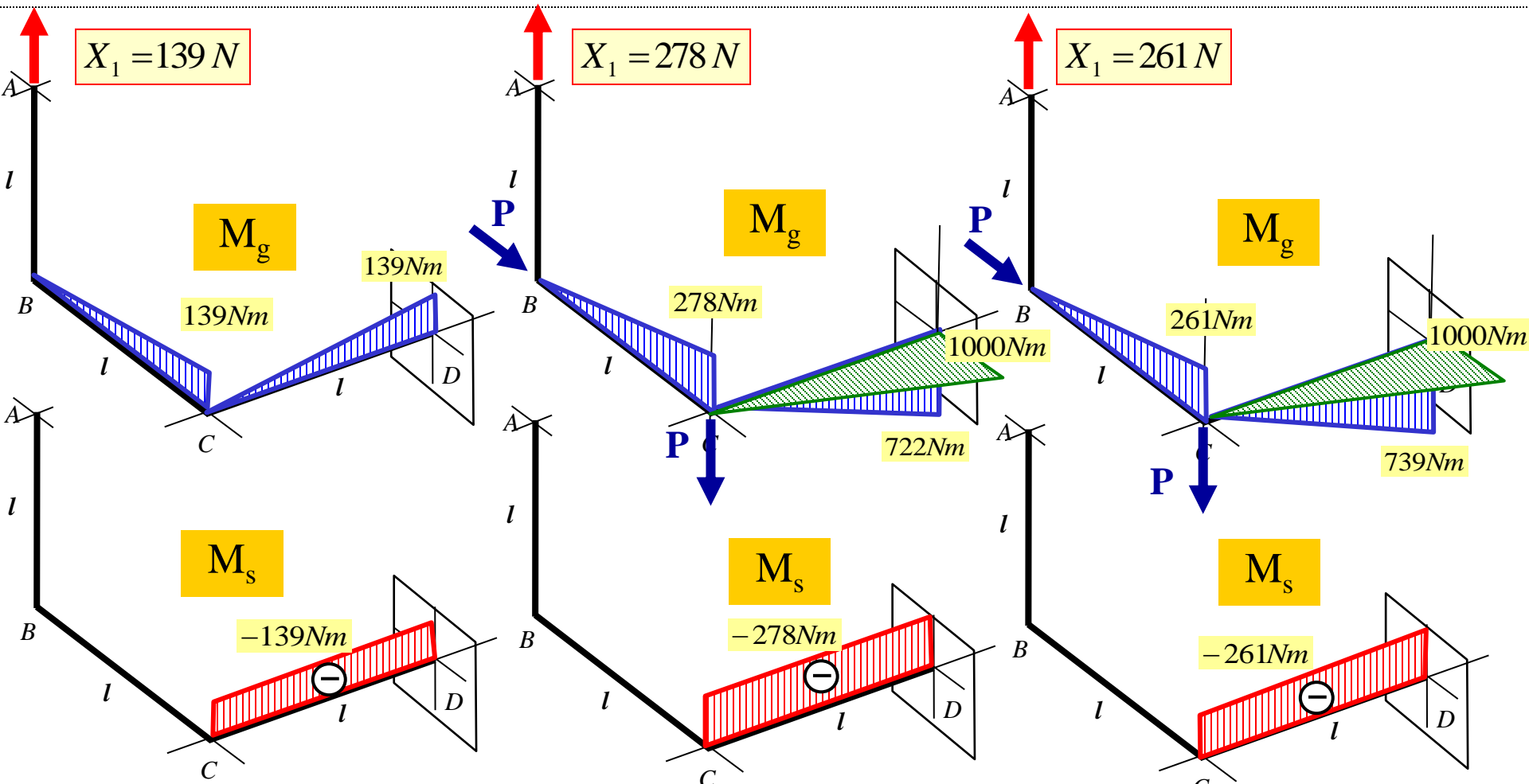
$$X_1 = \frac{5 EJ_y \delta_z}{12 l^3}$$

Montaż + siły:

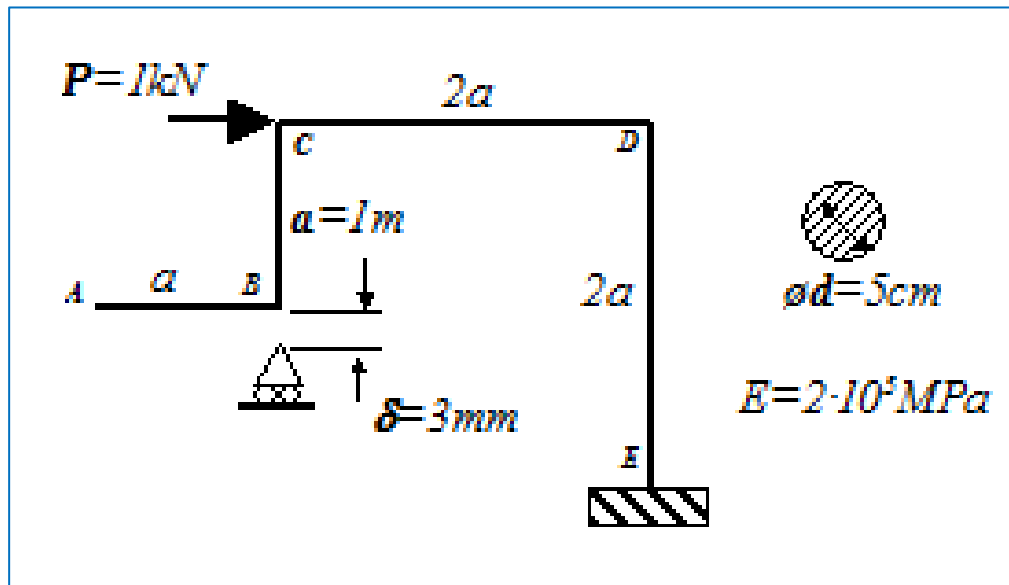
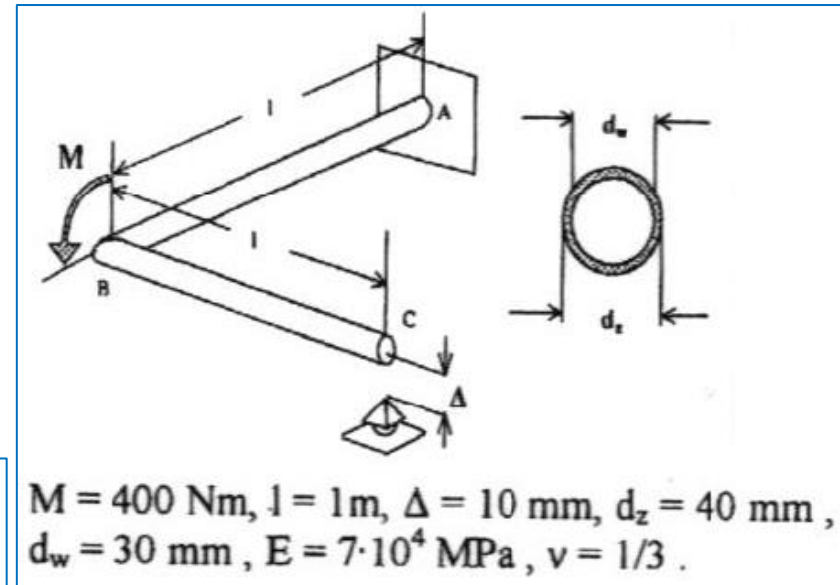
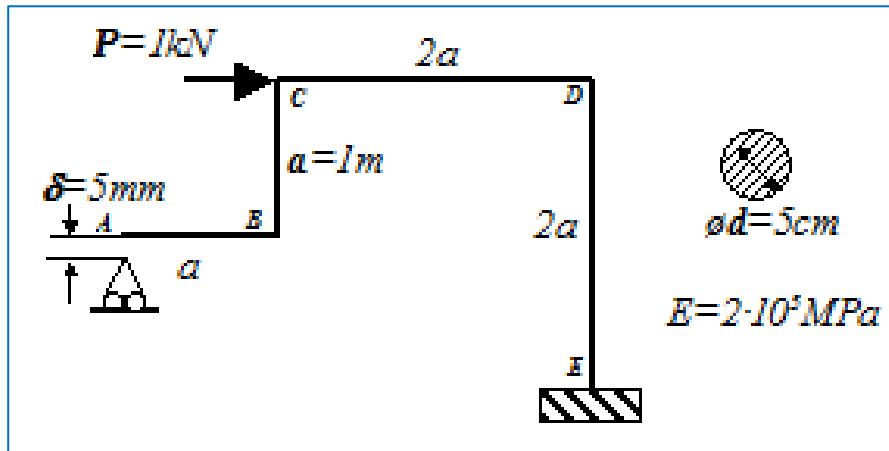
$$X_1 = \frac{5 EJ_y \delta_z}{12 l^3} + \frac{5}{36} P$$

Montaż + siły + temperatura:

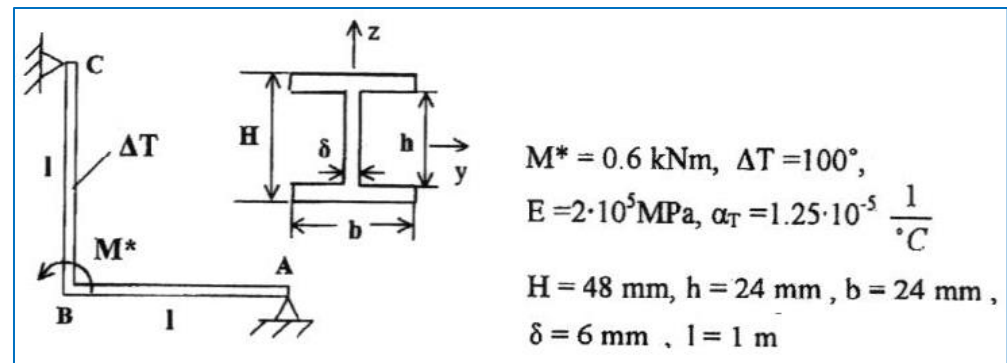
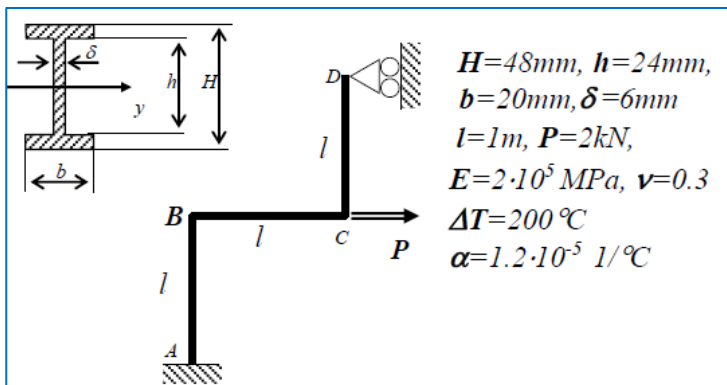
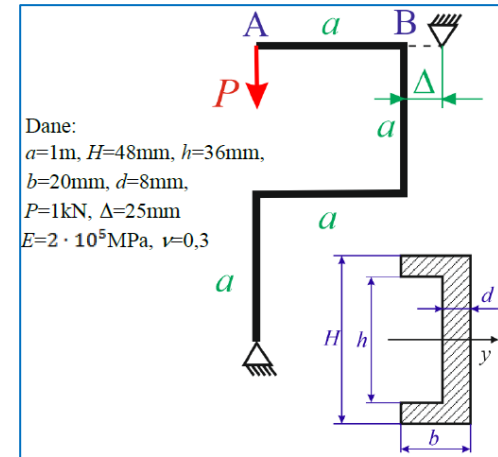
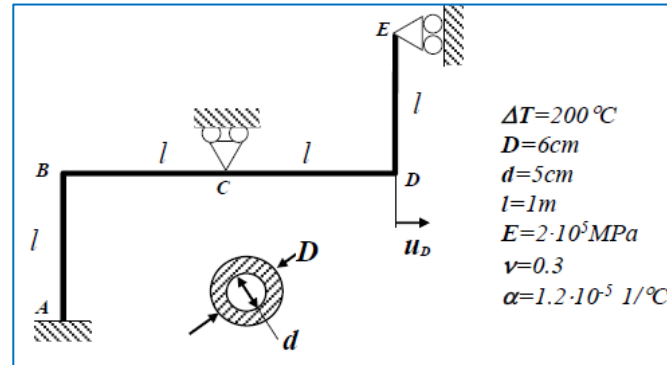
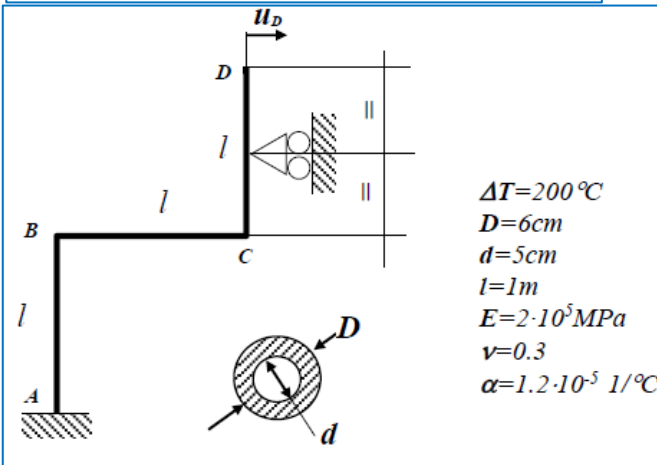
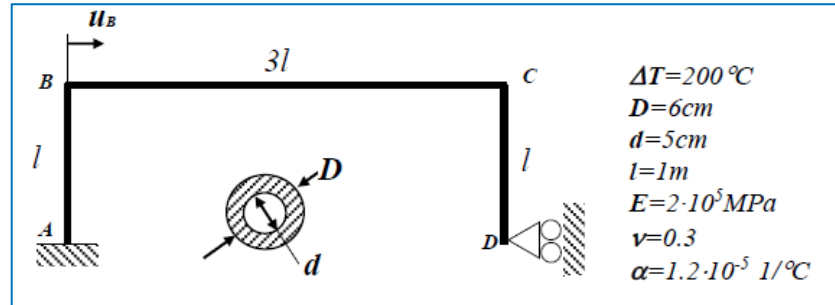
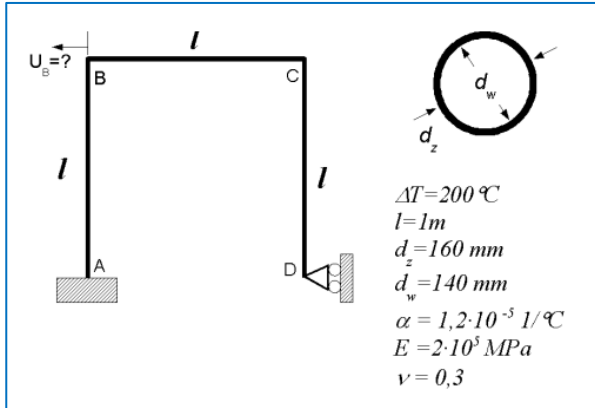
$$X_1 = \frac{5 EJ_y (\delta_z - l \alpha \Delta T)}{12 l^3} + \frac{5}{36} P$$



Przykłady zadań z egzaminów



Przykłady zadań z egzaminów



Przykłady zadań z egzaminów

